Bashing Geometry with Complex Numbers
用複數炸幾何

EVAN CHEN
陳誼廷

5月2日2014年

We show how complex numbers can be used to solve geometry problems.

1 複數的平面

令 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 分別為複數和實數的所形成的集合。

每一個複數 z 可寫成

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

此處 $a, b, r, \theta \in \mathbb{R}$ 而 $0 \le \theta < 2\pi$。 我們寫 $|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$ 且 $\arg z = \theta$。

更主要，每個複數有一個複共軛 $\overline{z} = a - bi$。共軛滿足以下的方程：

$$\begin{aligned} \overline{w \pm z} &= \overline{w} \pm \overline{z} \\ \overline{w \cdot z} &= \overline{w} \cdot \overline{z} \\ \overline{w/z} &= \overline{w}/\overline{z} \\ |z|^2 &= z \cdot \overline{z} \end{aligned}$$

注意 $z \in \mathbb{R}$ 的充要條件為 $z = \overline{z}$，且 $z \in i\mathbb{R}$ 的充要條件為 $z + \overline{z} = 0$。

我們把平面上每一個點用一個複數表示。 對每個點 Z 我們會用一個 $z \in \mathbb{C}$ 來代表（所以大寫的字代表點，小寫的字代表複數）。

複數的加減剛好跟向量一樣。 乘法就比較有趣。對有任何 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$，我們有

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \text{ 和 } \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

我們可從該乘法看出其幾何意義。 舉個例，對於任意點 Z 和 W， 我們可以對 W 把 Z 轉 90°：

$$z \mapsto i(z - w) + w.$$

2 首先的命題

我們先談一些最主要的命題。

命題 1. 令 A, B, C, D 為兩兩相異的點。 則 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ 的充要條件為 $\frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$; *i.e.*

$$\frac{d-c}{b-a} + \overline{\left(\frac{d-c}{b-a}\right)} = 0.$$

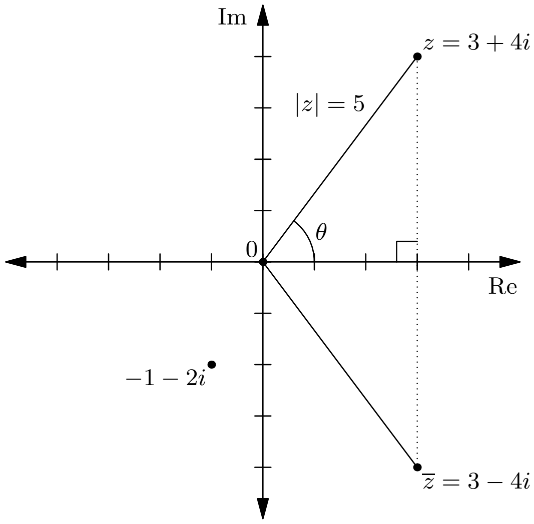


圖 1: 平面上取了複數 $z = 3+4i$ 且 $-1-2i$; $\overline{z} = 3-4i$ 為 z 的共軛.

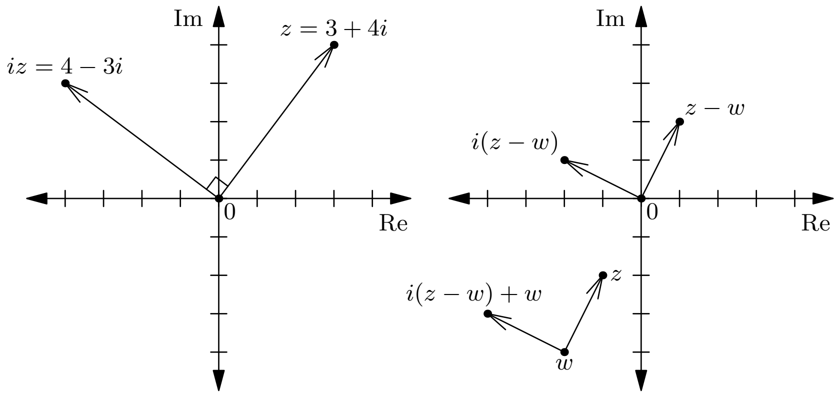


圖 2: $z \mapsto i(z-w)+w$.

【證】 條件等價與 $\frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R} \iff \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \equiv \pm 90^\circ \iff \overline{AB} \perp \overline{CD}$。 □

命題 2. 令 A, B, C 為兩兩異的點。則 A, B, C 共線的充要條件為 $\frac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$; *i.e.*

$$\frac{c-a}{c-b} = \overline{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}.$$

【證】 跟以上的命題一樣。 □

命題 3. 令 A, B, C, D 為兩兩相異的點。則 A, B, C, D 共圓的充要條件為

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R}.$$

【證】 可得 $\arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right) = \angle ACB$， $\arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right) = \angle ADB$， (angles are directed)。 □

我們現在陳述一個比較常用的公式。

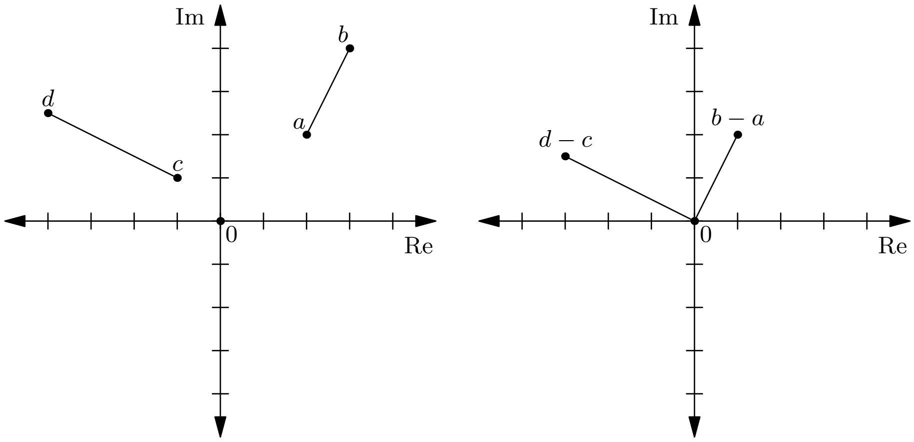


圖 3: $\overline{AB} \perp \overline{CD} \iff \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

引理 4 (對稱點)**.** 設 W 為 Z 對一個 $\overline{AB}$ 的對稱點。則

$$w = \frac{(a-b)\overline{z} + \overline{a}b - a\overline{b}}{\overline{a} - \overline{b}}.$$

當然這時候 Z 對 $\overline{AB}$ 的垂足為 $\frac{1}{2}(w+z)$。

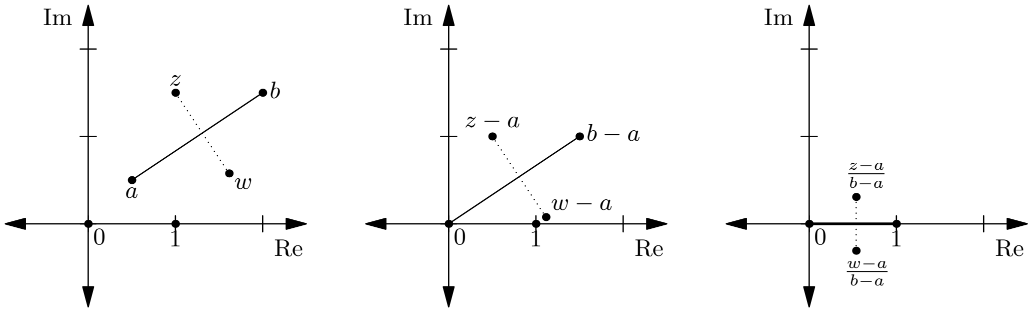


圖 4: Z 對 $\overline{AB}$ 的對稱點。

【證】 根據 Figure 4 我們可得

$$\frac{w-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)} = \frac{\overline{z} - \overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}}.$$

從此可解 $w = \frac{(a-b)\overline{z} + \overline{a}b - a\overline{b}}{\overline{a} - \overline{b}}$。 □

我們再給兩條公式。

定理 5 (面積/共線的方程)**.** 令 A, B, C 位點。則 $\triangle ABC$ 的面積為

$$\pm\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}.$$

特別地，A, B, C 共線的充要條件為以上的行列式為零。

【證】 用直角座標來證。 □

定理 5 常常比命題 2 好用。
其實我們也可以把任意兩條線交叉。

命題 6. 令 A, B, C, D 為點。 則 AB 和 CD 的交叉點位

$$\frac{(\bar{a}b-a\bar{b})(c-d)-(a-b)(\bar{c}d-c\bar{d})}{(\bar{a}-\bar{b})(c-d)-(a-b)(\bar{c}-\bar{d})}.$$

可是除非 $d=0$ 或 a, b, c, d 在單位圓上，這方程不太好用。

3 單位圓和三角形的心

在複平面上，單位圓是很重要。根據以上，對於每個 $|z|=1$ 我們有

$$\overline{z}=\frac{1}{z}.$$

利用上述，我們可得一下的引理。

引理 7. 若 $|a|=|b|=1$ 且 $z\in\mathbb{C}$, 則 Z 對 $\overline{AB}$ 的對稱點為 $a+b-ab\overline{z}$， 而 Z 對 $\overline{AB}$ 的垂足為

$$\frac{1}{2}\left(z+a+b-ab\overline{z}\right).$$

引理 8. 若 A, B, C, D 落在單位圓上，則 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的交叉點為

$$\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}.$$

這幾方程比以上的漂亮多了。 在單位圓上，我們也可馬上得到一個三角形的心：

定理 9. 令 ABC 為三角形。假設 ABC 的外接圓為複平面的單位圓。則 ABC 的外心，重心，垂心分別為 0, $\frac{1}{3}(a+b+c)$, $a+b+c$。

利用以上馬上可證 Euler 線的定理。

【證】 外心和垂心的方程是明顯的。 令 $h=a+b+c$。只需證明 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$，等等。我們可設

$$z=\frac{h-a}{b-c}=\frac{b+c}{b-c}.$$

則

$$\overline{z}=\overline{\left(\frac{b+c}{b-c}\right)}=\frac{\overline{b}+\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}}=\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}=\frac{c+b}{c-b}=-z$$

因此 $z\in i\mathbb{R}$，得證。 □

我們也其實可得到內心的方程。

定理 10. 令 I 和 Γ 分別為三角形 ABC 的內心和外接圓。令直線 AI, BI, CI 分別與 Γ 交叉在點 D, E, F。 若 Γ 為複平面的單位圓，則存在 $x, y, z\in\mathbb{C}$ 滿住

$$a=x^2, b=y^2, c=z^2 \text{ 且 } d=-yz, e=-zx, f=-xy.$$

注意 $|x|=|y|=|z|=1$。 將內心 I 為 $-(xy+yz+zx)$。

【證】 證明 I 為 $\triangle DEF$ 的垂心。 □

4 另外的公式

引理 11. 令 A, B 落在單位圓上，且取點 P 使得 $\overline{PA}, \overline{PB}$ 是切線。則

$$p = \frac{2}{\overline{a}+\overline{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

【**證**】 設 M 為 $\overline{AB}$ 的中點，且 $o=0$。可證 $OM \cdot OP = 1$ 且 P 在射線 OM 上。 □

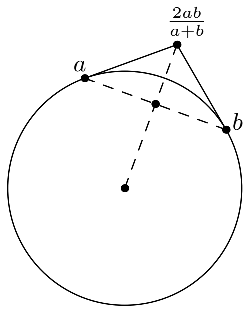


圖 5: 兩條切線交叉。$p = \frac{2}{\overline{a}+\overline{b}}$。

引理 12. 對於任意 x, y, z, 三角形 XYZ 的外心為

$$\begin{vmatrix} x & x\bar{x} & 1 \\ y & y\bar{y} & 1 \\ z & z\bar{z} & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x & \bar{x} & 1 \\ y & \bar{y} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix}.$$

如需利用這個方程，可平移 z 到 0，在算行列式，最後在平移回來。這樣行列式就比較好算。

5 例子

例子 13 (MOP 2006)**.** 令 H 為三角形 ABC 的垂心。取 D, E, F 在 ABC 的外接圓上，使得 $\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$。 設 S, T, U 分別為 D, E, F 對 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的對稱點。試證 S, T, U, H 共圓。

【**證**】 設 (ABC) 為單位元，則 $h = a+b+c$。 可不方假設 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 跟實軸垂直（要不然把 ABC 專一下...）。則 $d = \overline{a}$, 等等。 因此 $s = b+c-bc\overline{d} = b+c-abc$，等等。從此可得

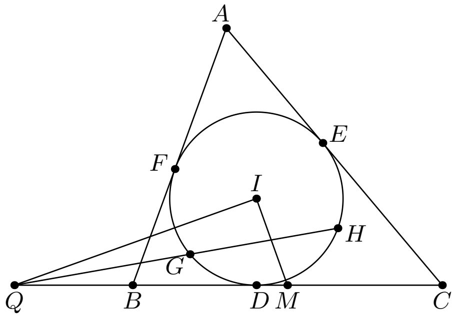
$$\frac{s-t}{s-u} = \frac{b-a}{c-a} \quad 且 \quad \frac{h-t}{h-u} = \frac{b+abc}{c+abc}.$$

算出

$$\frac{s-t}{s-u} : \frac{h-t}{h-u} = \frac{(b-a)(c+abc)}{(c-a)(b+abc)} = \frac{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}\right)}{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{abc}\right)} \implies \frac{s-t}{s-u} : \frac{h-t}{h-u} \in \mathbb{R}$$

就得證。 □

例子 14 (模擬競賽 2014)**.** 設 $\triangle ABC$ 的內切圓圓心為 I，且該內切圓分別與 $\overline{CA}, \overline{AB}$ 邊切於點 E, F。令點 E, F 對 I 的對稱點分別為 G, H。 設點 Q 為 $\overline{GH}$ 與 $\overline{BC}$ 的交點，並設點 M 為 $\overline{BC}$ 的中點。試證 $\overline{IQ}$ 與 $\overline{IM}$ 垂直。



【解】 令 D 為 I 對 $\overline{BC}$ 的垂足，且設 (DEF) 為單位圓。（這讓我們可利用 §3 的引理。） 則 $|d| = |e| = |f| = 1$，且 $g = -e, h = -f$。 設 $x = \overline{d} = \frac{1}{d}$，類似定義 y, z。 則

$$b = \frac{2}{\overline{d} + \overline{f}} = \frac{2}{x+z}.$$

類似有 $c = \frac{2}{x+y}$，因此

$$m = \frac{1}{2}(b+c) = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} = \frac{2x+y+z}{(x+y)(x+z)}.$$

再來，我們有 $Q = DD \cap GH$，故

$$q = \frac{dd(g+h) - gh(d+d)}{d^2 - gh} = \frac{\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{yz}\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{yz}} = \frac{2x+y+z}{x^2 - yz}.$$

因此

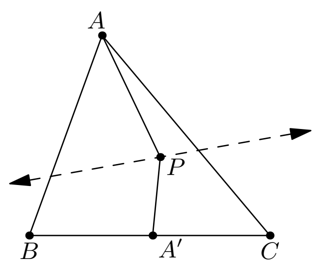
$$m/q = \frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)}.$$

則

$$\overline{m/q} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{yz}}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)} = \frac{yz - x^2}{(x+y)(x+z)} = -m/q$$

故 $m/q \in i\mathbb{R}$，得證。 □

例子 15 (USA 2012)**.** 令 ABC 為三角形，並設 P 為任意一點且設 γ 為一條通過 P 的線。定義 A' 為直線 BC 與 $\overline{PA}$ 對 γ 的對稱線 的交叉點。類似定義 B' 和 C'。試證：A', B', C' 三點共線。



【解】 設 $p = 0$ 且設 γ 為實軸。 則 A' 是 bc 和 $p\bar{a}$ 的交叉點。從此，利用命題 6 可得

$$a' = \frac{\bar{a}(\bar{b}c - b\bar{c})}{(\bar{b} - \bar{c})\bar{a} - (b-c)a}.$$

注意

$$\bar{a}' = \frac{a(b\bar{c}-\bar{b}c)}{(b-c)a-(\bar{b}-\bar{c})\bar{a}}.$$

利用定理 5，我們需證

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\bar{a}(\bar{b}c-b\bar{c})}{(\bar{b}-\bar{c})\bar{a}-(b-c)a} & \frac{a(b\bar{c}-\bar{b}c)}{(b-c)a-(\bar{b}-\bar{c})\bar{a}} & 1 \\ \frac{\bar{b}(\bar{c}a-c\bar{a})}{(\bar{c}-\bar{a})\bar{b}-(c-a)b} & \frac{b(c\bar{a}-\bar{c}a)}{(c-a)b-(\bar{c}-\bar{a})\bar{b}} & 1 \\ \frac{\bar{c}(\bar{a}b-a\bar{b})}{(\bar{a}-\bar{b})\bar{c}-(a-b)c} & \frac{c(a\bar{b}-\bar{a}b)}{(a-b)c-(\bar{a}-\bar{b})\bar{c}} & 1 \end{vmatrix}.$$

上述等價與

$$0 = \begin{vmatrix} \bar{a}(\bar{b}c-b\bar{c}) & a(\bar{b}c-b\bar{c}) & (\bar{b}-\bar{c})\bar{a}-(b-c)a \\ \bar{b}(\bar{c}a-c\bar{a}) & b(\bar{c}a-c\bar{a}) & (\bar{c}-\bar{a})\bar{b}-(c-a)b \\ \bar{c}(\bar{a}b-a\bar{b}) & c(\bar{a}b-a\bar{b}) & (\bar{a}-\bar{b})\bar{c}-(a-b)c \end{vmatrix}.$$

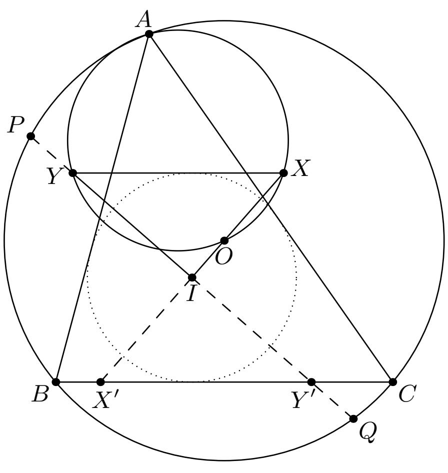
把行列式算出來，右邊這等於

$$\sum_{\text{cyc}}((\bar{b}-\bar{c})\bar{a}-(b-c)a)\cdot - \begin{vmatrix} b & \bar{b} \\ c & \bar{c} \end{vmatrix} \cdot (\bar{c}a-c\bar{a})\left(\bar{a}b-a\bar{b}\right)$$

或

$$(\bar{b}c-c\bar{b})(\bar{c}a-c\bar{a})(\bar{a}b-a\bar{b})\sum_{\text{cyc}}\left(ab-ac+\bar{c}\bar{a}-\bar{b}\bar{a}\right)=0. \qquad \square$$

例子 16 (獨立研究 2014)**.** 令 I 與 O 分別為三角形 ABC 的內心與外心。設 ℓ 為一條直線，為 ABC 的內接圓相切並於 $\overline{BC}$ 平行。 取 X, Y 在 ℓ 上使得 I, O, X 共線且 $\angle XIY = 90°$. 試證 A, X, O, Y 共圓。



【解】 設 X' 和 Y' 分別為 X 和 Y 對 I 的對稱點。注意 X, Y 落在 $\overline{BC}$ 上。 再來，設 P, Q 為 $\overline{IY}$ 和 ABC 的外接圓的交叉點。

令 (ABC) 為複平面的單位元。設 j 為 I 的複數（所以不會跟 $i=\sqrt{-1}$ 搞混）。 則

$$x' = \frac{\left(\bar{b}c-b\bar{c}\right)(j-0)-\left(\bar{j}0-j\bar{0}\right)(b-c)}{(\bar{b}-\bar{c})(j-0)-(b-c)(\bar{j}-\bar{0})} = \frac{j\cdot\frac{c^2-b^2}{bc}}{j\cdot\frac{c-b}{bc}-(b-c)\bar{j}} = \frac{j(b+c)}{j+bc\bar{j}}.$$

我們在求 y'。考慮以下 z 的二次方程：

$$\frac{z-j}{j}+\frac{\frac{1}{z}-\bar{j}}{\bar{j}}=0 \iff z^2-2jz+j/\bar{j}=0.$$

以上的零點剛好為 p 和 q，故 $p+q=2j$ 而 $pq=j/\overline{j}$。 因此個算

$$y'=\frac{pq(b+c)-bc(p+q)}{pq-bc}=\frac{j(b+c)-2bcj\overline{j}}{j-bc\overline{j}}=\frac{j(b+c)-2bcj\overline{j}}{j-bc\overline{j}}.$$

將可得

$$x=2j-x'=\frac{j(2j-b-c+2bc\overline{j})}{j+bc\overline{j}} \quad \text{和} \quad y=2j-y'=\frac{j(2j-b-c)}{j-bc\overline{j}}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
y-x&=j\cdot\frac{(2j-b-c)(j+bc\overline{j})-(2j-b-c+2bc\overline{j})(j-bc\overline{j})}{(j-bc\overline{j})(j+bc\overline{j})}\\
&=j\cdot\frac{2bc\overline{j}(2j-b-c)-2bc\overline{j}(j-bc\overline{j})}{(j-bc\overline{j})(j+bc\overline{j})}\\
&=j\cdot\frac{2bc\overline{j}\left(j-b-c+bc\overline{j}\right)}{(j-bc\overline{j})(j+bc\overline{j})}\\
X=\frac{y-x}{x}&=\frac{2bc\overline{j}\left(j-b-c+bc\overline{j}\right)}{(j-bc\overline{j})(2j-b-c+2bc\overline{j})}\\
A=\frac{y-a}{a}&=\frac{j(2j-b-c-a)+abc\overline{j}}{a(j-bc\overline{j})}
\end{aligned}$$

我們需證 $X/A=\overline{X/A}$。 將設 $a=x^2$, $b=y^2$, $c=z^2$, $j=-(xy+yz+zx)$, $\overline{j}=-\frac{x+y+z}{xyz}$（跟以前的 x, y 無關）。 根據上述改寫成

$$\begin{aligned}
X&=\frac{2\frac{yz}{x}(x+y+z)(\frac{yz}{x}(x+y+z)+y^2+z^2+xy+yz+zx)}{\left(-\frac{yz}{x}(x+y+z)+xy+yz+zx\right)\left(y^2+z^2+2(xy+yz+zx)+2\frac{yz}{x}(x+y+z)\right)}\\
&=\frac{2yz(x+y+z)\left(2xyz+\sum_{\text{sym}}x^2y\right)}{(y+z)(x^2-yz)\left(x(y+z)(2x+y+z)+2yz(x+y+z)\right)}\\
&=\frac{2yz(x+y+z)(x+y)(x+z)}{(x^2-yz)\left((x^2+yz)(y+z)+(xy+yz+zx)(x+y+z)\right)}
\end{aligned}$$

並

$$\begin{aligned}
A&=\frac{(xy+yz+zx)(x+y+z)^2-xyz(x+y+z)}{x^2(-(xy+yz+zx)+\frac{yz}{x}(x+y+z))}\\
&=\frac{(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)}{x(yz-x^2)(y+z)}
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
X/A&=\frac{-2xyz}{(x^2+yz)(y+z)+(x+y+z)(xy+yz+zx)}\\
&=\frac{-\frac{2}{xyz}}{(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{yz})(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})+(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx})}\\
&=\overline{X/A}
\end{aligned}$$

得證。 □

6 練習題

1. 令 $ABCD$ 為圓內接的四邊形。令 H_A, H_B, H_C, H_D 分別為三角形 BCD, CDA, DAB, ABC 的垂心。試證 $\overline{AH_A}$, $\overline{BH_B}$, $\overline{CH_C}$, $\overline{DH_D}$ 共點。

2. (China TST 2011) 令 Γ 為三角形 ABC 的外接圓。 假設 $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ 為 Γ 的直徑。設 P 為 ABC 內的莫一點，並設 D, E, F 分別為 P 對 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 的垂足。 令 X 為 A' 對 D 的對稱點；類似定義 Y 和 Z。試證 $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$。

3. 令 $ABCD$ 為四邊形，且 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ 對莫個圓 ω 相切。試證：$\overline{AC}$ 的中點，$\overline{BD}$ 的中點，與 ω 的圓心共線。

4. (Simson 線) 令 ABC 為三角形並 P 為 ABC 的外接圓上的莫一點。
   (a) 令 D, E, F 為 P 對 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 的垂足。試證 D, E, F 共線。
   (b) 令 H 為 ABC 的垂心。試證 $\overline{EF}$ 通過 $\overline{PH}$ 的中點。

5. (Princeton) 令 γ 和 I 分別為三角形 ABC 的內心和內接圓。設 D, E, F 分別為 γ 對 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 的切點，並設 D' 為 D 對 I 的對稱點。假設直線 EF 分別為 γ 對 D 與 D' 的切線交於點 P 與 Q。試證 $\angle DAD' + \angle PIQ = 180°$。

6. (Schiffler 點) 令 I 為 $\triangle ABC$ 的內心。試證： $\triangle AIB$, $\triangle BIC$, $\triangle CIA$, $\triangle ABC$ 的歐拉線 (Euler line) 共點。

7. (USA TST 2014) 令 $ABCD$ 為內接圓的四邊形，且設 E, F, G, H 分別為 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ 的中點。設 W, X, Y, Z 分別為 AHE, BEF, CFG, DGH 的垂心。試證： $ABCD$ 和 $WXYZ$ 的面積相等。

8. 令 O 為三角形 ABC 的外心。一條通過 O 的直線 ℓ 分別於 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 交於點 X 與 Y。 令 M 和 N 分別為 BY 和 CX 的中點。 試證 $\angle MON = \angle BAC$。

9. (APMO 2010) 令 ABC 是銳角三角形，滿足 $AB > BC$ 且 $AC > BC$。 分別記 O 與 H 為三角形 ABC 的外心與垂心。 設三角形 AHC 的外接圓交直線 AB 於異於 A 的一點 M; 且三角形 AHB 的外接圓交直線 AC 於異於 A 的一點 N。證明三角形 MNH 的外接圓圓心在直線 OH 上。

10. (Iran 2013) 令 ABC 是銳角三角形，並設 M 為劣弧 $\widehat{BC}$ 的中點。取 N 在 ABC 的外接圓上，使得 $\overline{AN} \perp \overline{BC}$，在分別取 K, L 在邊 AB 和 AC 上使得 $\overline{OK} \parallel \overline{MB}$, $\overline{OL} \parallel \overline{MC}$，此處 O 為 ABC 的外心。試證 $NK = NL$。

11. (MOP 2006) 令 $ABCD$ 為圓內接的四邊形，並設 O 為 $ABCD$ 的外心。 設 P 為平面上的莫一點，且設 O_1, O_2, O_3, O_4 分別為三角形 PAB, PBC, PCD, PDA 的外心. 試證：$\overline{O_1O_3}$, $\overline{O_2O_4}$, $\overline{OP}$ 的中點共線。